博士学位論文審査要旨

申請者: 雪田 友成

論文題目: Arithmetic properties of growth rates of hyperbolic Coxeter groups (双曲コクセター群の増大度の数論的性質)

審査員:

主査　小森 洋平　早稲田大学教育・総合科学学術院教授　博士 (理学)

副査　Ruth Kellerhals　Université de Fribourg　Professor (Dr.phil.II)

副査　谷山 公規　早稲田大学教育・総合科学学術院教授　博士 (理学)

副査　松崎 克彦　早稲田大学教育・総合科学学術院教授　博士 (理学)

1　本論文の位置付け

1934 年に H.S.M. Coxeter は、鏡映から作られる変換群の一般化として、コクセター群を定義した。球面幾何学、ユークリッド幾何学、双曲幾何学においては、超平面により囲まれる図形として多面体が定義され、その面に関する折り返しの作る変換群としてコクセター群が現れる。このような幾何学的なコクセター群により、多面体は空間全体にタイル張りとして拡がり、タイルが空間を埋め尽くす速さを表す量が増大度である。例えば、図 1 はユークリッド平面における直角二等辺三角形の、各辺での折り返しにより作られるタイル張りを表していて、その増大度は 1 である。一方、図 2 は双曲平面における 3 つの角がすべて 45 度の双曲三角形の、各辺での折り返しにより作られるタイル張りを表している。この場合の増大度は 4 次方程式 $x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ の、1 より大きな実根 $x = 1.72208\cdots$ である。

Cannon と Wagreich による、双曲三角形から定まるコクセター群の増大度の研究に端を発して、2 次元の場合の双曲コクセター群の増大度の数論的性質は、Parry や Floyd により完全に決定された。一方で、3 次元以上の場合においては、多面体の組み合わせを制限した場合に、双曲コクセター群の増大度の数論的性質が明らかにされていたが、統一的な結果を得るには至っていなかった。本論文は、3 次元と 4 次元の双曲コクセター群の増大度を研究対象として、その数論的性質を明らかにしている。特に、3 次元双曲コクセター群の増大度

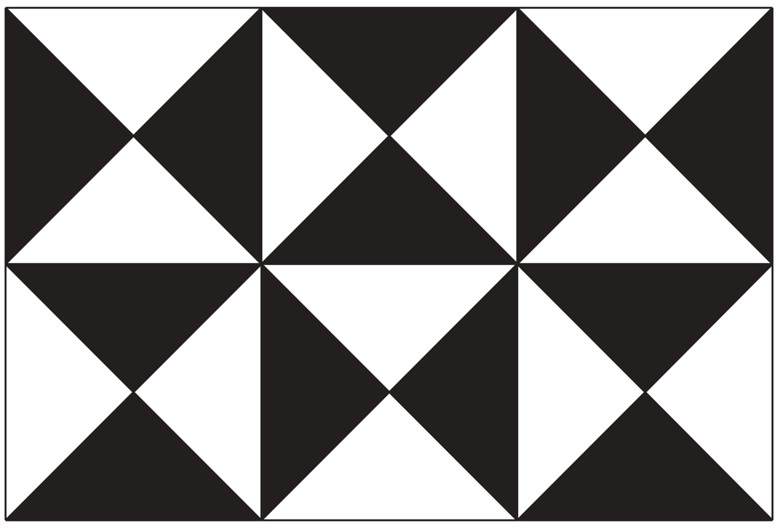

図 1　ユークリッド平面のタイル張り

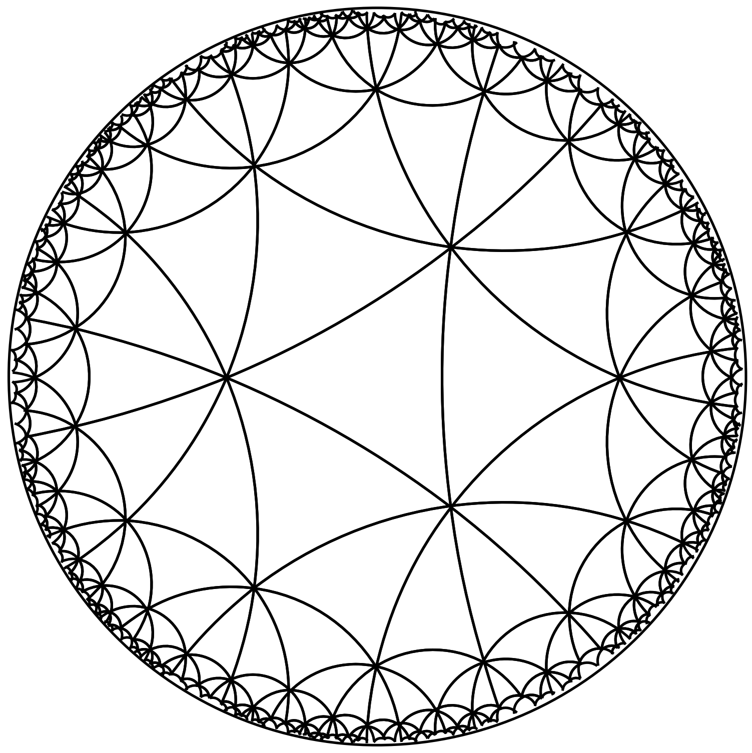

図 2　双曲平面のタイル張り

の数論的性質に関する Kellerhals-Perren の予想を解決しており、4 次元以上の場合での進展が期待される研究内容である。

2　各章の内容と論評

第 1 章

本章では、双曲コクセター群の増大度の数論的性質に関するこれまでの先行研究について概説しており、後の章につながる研究の動機付けを与えている。

第 2 章

本章では、後の章における双曲コクセター群の増大度の研究で使われる道具立てを行なっている。特に Solomon の公式と Steinberg の公式を用いた、双曲コクセター群の増大度を計算する手法について精密に述べられている。また、Andreev による双曲多面体の分類定理を用いて得られる、多面体の辺の個数に関する不等式についての説明がなされている。Andreev の分類定理は 3 次元双曲多面体に特化した結果のため、4 次元以上の双曲多面体の組み合わせ構造から得られる不等式に関しては、今後のさらなる進展が期待される。

第 3 章

本章では、主結果の一つである、3 次元双曲コクセター群の増大度が Perron 数と呼ばれる代数的整数である事が示されている。この結果は、Kellerhals-Perren による双曲コクセター群の増大度が Perron 数であるという予想を、3 次元の場合に肯定的に解決した画期的な成果である。ここで、1 より大きい実数 τ が Perron 数であるとは、整数を係数とする既約多項式の零点であり、その多項式の他の零点の絶対値が τ より小さくなる事である (図 3 参照)。

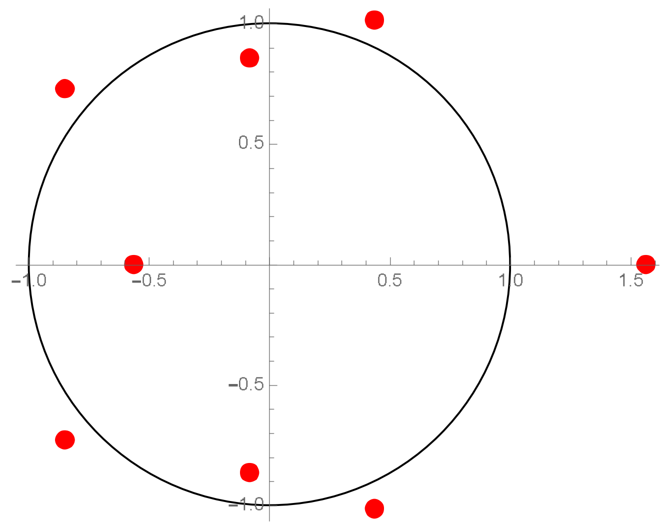

図 3　Perron 数を定める多項式の零点の分布

第 4 章

第 3 章において 3 次元双曲コクセター群の増大度の数論的性質が明らかにされたので、本章では 4 次元双曲コクセター群の増大度に関する考察をしている。Tumarkin により構成された 4 次元双曲コクセターピラミッドの性質を研究することにより、増大度が Perron 数であるような 4 次元理想双曲コクセター群の無限個の系列を与えている。ここで、理想コクセターピラミッドとは底面が直方体で、全ての頂点が双曲空間の境界上に存在している多面体である。この結果は、4 次元での Kellerhals-Perren 予想が成立する根拠を与える好例となっている。

3　結論

本論文では双曲コクセター群から定まる幾何学的量である増大度の数論的性質について、3 次元の場合に Kellerhals-Perren 予想の完全な解決を、4 次元の場合に Kellerhals-Perren 予想が成立する無限個の例を与えている。特に 3 次元の場合に、増大度の数論的性質を明らかにしたことは、これまでの Cannon-Wagreich、Parry、Floyd の結果と合わせて、双曲コクセター群の増大度の研究において多大な貢献をしたと認められる。課題があるとすれば、本論文においては増大度の数論的性質と多面体の幾何学的性質の関係性が明らかにされていないことが挙げられよう。しかし、それは申請者の今後の研究の進展に期待したい。

以上の理由により、審査員一同は、本論文が博士 (理学) の学位に値するものであることを認める。

以上

２０１９年　１月